1079. Wimann ノ定理ニツイテ

有馬　喜八郎（阪大）

(I) 整函数 $f(z)$ ヲ考ヘル。

原点ヲ中心トシ半径 r ナル円ヲ C_r ニテ表ハシ $\underset{C_r}{Max}|f(z)|=M(r)$, $\underset{C_r}{Min}|f(z)|=m(r)$ トス。

r_n ヲ適当ニトルトキ（$r_1<r_2<r_3\cdots\cdots<r_n<\cdots\cdots\to\infty$）

$$n\to\infty \quad \lim_{n\to\infty} m(r_n)=\infty$$

ナルトキ $f(z)$ ハ W. property ヲ有スト定義ス。

然ルトキ Wimann ノ定理ハ

"Order λ < $\frac{1}{2}$ ナルトキ $f(z)$ ハ W property ヲ有ス"
トナル.

Milloux[1] ハ $f(z)$ ガ零点ヲ實數負軸上ノミニ有シ

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log M(r)}{\sqrt{r}}=0$$ ナルトキ W. property ヲ有スルコト

ヲ証明シタ。

コレハ Wimann ノ定理ノ擴張ナルコトハ明ラカデス ordre ガ $\frac{1}{2}$ 以上ニツキ, コノ結果ノ拡張ヲ考ヘヨウト思ヒマス。

証明ニハ Carlemann - Milloux[2] ノ定理ヲ用ヒマスガコノ定理ニツイテノ説明ハ省略致シマス.

(II) 以下ニ於テ order λ ハコトハリナキ限リ何等ノ制限ナキモノトス.

(イ) $f(z)$ ガ有界帯 (∞ ニ延ビル領域デソコデ $|f(z)|$ ハ有界) ヲ有セザルタメノ充分條件ヲ考ヘル.

$f(z)$ ガ有界帯ヲ有スルモノトシ, ソノ一ツヲ D トシ D ニテ $|f(z)|<1$ トシテモ一般性ヲ失ハナイ.

原点ヨリ D ヘノ最短距離ヲ ρ, ソノ点ヲ $z=-\rho$ トシテモ z 平面ヲ廻轉スルコトニヨリ一般性ヲ失ハズ。

C_R ($R>\rho$ トス) 内ト D ノ外部トノ共通部分ヲ D_R トシ D_R ハ $|z|<R$ ナル境界デ 1, $|z|=R$ デ 0 トナル D_R 内デ

---

(1) Acta math. 1933.

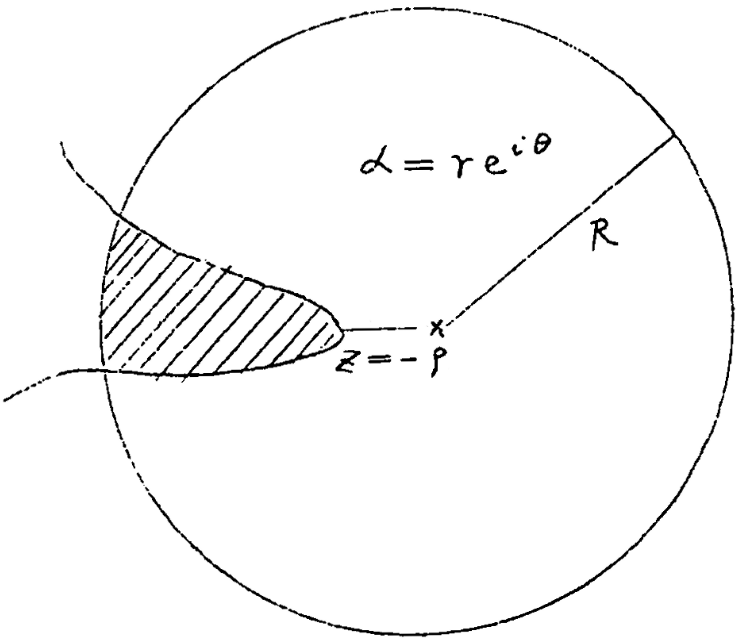
(2) Nevanlinna 著 Eindentige analytische Funktionen

調和函數ヲ $h_R(z)$ トス。

D_R 内ノ任意ノ点 α ヲトリ固定シテ考ヘル. 然ルトキ

$$\log|f(\alpha)| \leqq \log M(R)(1-h_R(\alpha))$$

以下 $h_R(\alpha)$ ヲ評價スル計算ヲナス。



先ヅ $z' = \dfrac{R(z+\rho)}{R^2+z\rho}$ ナル変換ヲトセバ $z=-\rho$ ハ原点ニ変リ $\alpha = re^{i\theta}$ ハ $R = \dfrac{R(re^{i\theta}+\rho)}{R^2+re^{i\theta}\rho}$ トナル.

$h_R(z)$ ガ $h(z')$ ニナッタトスレバ $h_R(\alpha) = h(R)$ Carlemann-Milloux ノ定理ニヨリ

$$h(R) \geqq \frac{2}{\pi}\sin^{-1}\frac{1-|R|}{1+|R|}$$

$$\therefore\ 1-h_R(\alpha) \leqq 1-\frac{2}{\pi}\sin^{-1}\frac{1-|R|}{1+|R|} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\frac{1-|R|}{1+|R|}\right)$$

$\beta = \dfrac{\pi}{2}-\sin^{-1}\dfrac{1-|R|}{1+|R|}$ トオケバ

$$\cos\beta = \frac{1-|R|}{1+|R|} \qquad \therefore\ \sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{|R|}{1+|R|}}$$

$|R| = \dfrac{R\sqrt{\rho^2+2r\rho\cos\theta+r^2}}{\sqrt{R^4+2R^2\rho r\cos\theta+\rho^2r^2}}$ ヨリ R ヲ充分大キクトレバ

$|R|$ ハ充分小サクナル故

$$\frac{\beta}{2} \doteqdot \sqrt{\frac{|R|}{1+|R|}} \doteqdot \frac{\sqrt[4]{\rho^2+2r\rho\cos\theta+r^2}}{\sqrt{R}}$$

$$\therefore \quad 1-h_\mu(z) \leqq \frac{2}{\pi}\beta \leqq \frac{4}{\pi}\frac{\sqrt[4]{\rho^2+2r\rho\cos\theta+r^2}}{\sqrt{R}}(1+\varepsilon(R))$$

$\varepsilon(R)$ ハ $R\to\infty$ ノトキ $\to 0$

$$\therefore \quad \log|f(\alpha)| \leqq \frac{4}{\pi}\frac{\log M(R)}{\sqrt{R}}(1+\varepsilon(R))\sqrt[4]{\rho^2+2r\rho\cos\theta+r^2}$$

$$\therefore \quad \frac{\log|f(\alpha)|}{\sqrt[4]{\rho^2+2r\rho\cos\theta+r^2}} \leqq \frac{4}{\pi}\frac{\log M(R)}{\sqrt{R}}(1+\varepsilon(R)) \cdots\cdots(1)$$

$\overline{\lim\limits_{R\to\infty}} \dfrac{\log M(R)}{\sqrt{R}} = M \qquad \underline{\lim\limits_{R\to\infty}} \dfrac{\log M(R)}{\sqrt{R}} = m$ トオク

（但シ m ハ有限ナルモノト假定ス）

(1) ヨリ

$$\frac{\log|f(\alpha)|}{\sqrt{\rho^2+2r\rho\cos\theta+r^2}} \leqq \frac{4}{\pi}m \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$\alpha = r_n e^{i\theta_n}$ ヲ $|f(\alpha)| = M(r_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log M(r_n)}{\sqrt{r_n}} = M$

ナル如クトッテ進メバ

(2) ヨリ $\qquad M \leqq \dfrac{4}{\pi}m \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

今 $m=0$ ナラバ (2) ヨリ $|f(\alpha)| \leqq 1$ トナリ α ハ D 外ノ任意ノ点ナル故不合理

故ニ (3) トヨリ

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & m\text{ガ有限デ}M>\frac{4}{\pi}m \\ \text{ナルカ}(2) & m=0\end{array}\right\}$$ (A) ナルトキ $f(z)$ ハ有界帯ヲ有セズ。

(ロ) (A) ナル假設ノモトニ議論ヲ進メル。

Kヲ任意ノ正数トスルトキ $|f(z)|<K$ ナル z ノ集合ハ上述ノコトヨリ閉曲線ニテ囲マレタ無数ノ領域ヨリナル集合Dトナル。

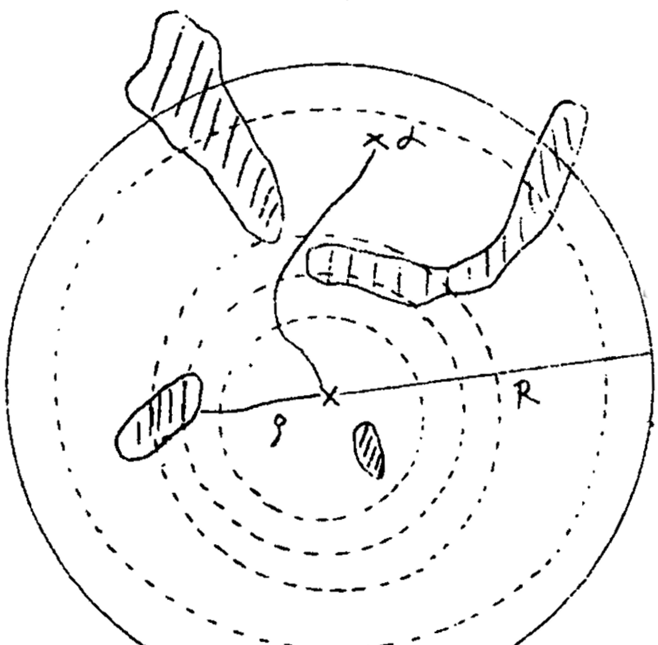
Dノ余集合ヲCトス。

然ルトキ如何程デモ大キイ適當ナrヲトレバ C_r ガDト交ハランモノガ存在スルコトヲ証明ス。

$K=1$ トシテ一般性ヲ失ハズ。

$C_r(r>\rho)$ ナルスベテガDト交ハルモノトス. C内ノ任意ノ点 $\alpha=re^{i\theta}$ ヲトル。

Rヲ充分大キクトレバD内ニハ有界帯ハ存在セザル故 α ト原点トヲ C_R 内トCノ共通部分ニテ（若シDノ内ニ原点ヲ含ムモノガアレバコレヲ除キ）結ブコトヲ得。



然ルトキ (イ) ノトキト全ク同様ニシテ (1) ノ式ヲ得.

故ニ (A) ノ條件ノモトニテハ

如何程デモ大キイ r ガ存在シテ C_r ハDト交ハラザル

モノが存在ス。

(イ)(ロ)ヨリ次ノ定理ヲ得.

定理(I) (A)ノ條件ヲ満足スル $f(z)$ ハ W property ヲ有ス.

ordre $\lambda<\frac{1}{2}$ 又ハ $\lambda=\frac{1}{2}$ ナル極小型ノ函数ニテハ

$\lim\limits_{R\to\infty}\frac{\log M(R)}{\sqrt{R}}=0$ ナル故 $m=0$ トナリ

系1. $\lambda<\frac{1}{2}$ 又ハ $\lambda=\frac{1}{2}$ ノ極小型ノ函数ハ W. property ヲ有ス。

(注意) $\lambda=\frac{1}{2}$ ノ中間型ノ函数中ニハ W. property ヲ有セザルモノが存在ス.

例ヘバ $\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ ハ $\lambda=\frac{1}{2}$ ノ中間型デ実数正軸上ニテ有界トナリ W. property ヲ有セズ.

次ニ $\lambda>\frac{1}{2}$ 又ハ $\lambda=\frac{1}{2}$ ノ極大型デ $\overline{\lim}\frac{\log M(R)}{\sqrt{R}}=\infty$ ナル故 m が有限ナラバ $M=\infty>\frac{4}{\pi}m$ トナル故

系2. $\lambda>\frac{1}{2}$ 又ハ $\lambda=\frac{1}{2}$ ノ極大型デ $\underline{\lim}\frac{\log M(R)}{\sqrt{R}}$ が有限ナラバ W. property ヲ有ス.

(III) (A)ノ假定ノモトニ(II)(ロ)ノ D ノ内ノ一ツノ領域 D_n ヘ原点ヨリノ最大最小距離ヲ $\overline{r}_n$, $\underline{r}_n$ トス $(\overline{r}_n>\underline{r}_n\to\infty)$

$\frac{\overline{r}_n}{\underline{r}_n}<K$ (有界) がスベテノ n ニ對シテ成立スルナラバ

明ラカニ $\log\overline{r}_n-\log\underline{r}_n\leqq 2\log 2M(\overline{r}_n)+O(1)$

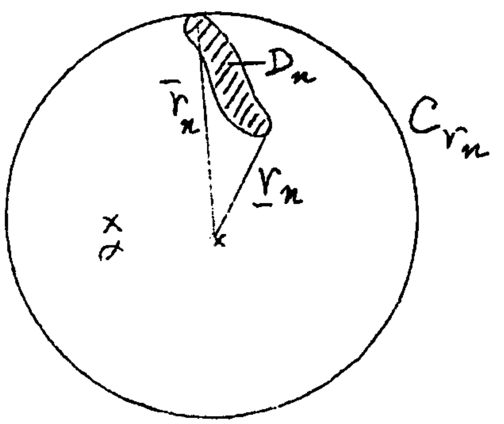
$\overline{\lim}\,\dfrac{\bar{r}_n}{\underline{r}_n}=\infty$ トシ $\lim\limits_{n_k\to\infty}\dfrac{\bar{r}_n}{\underline{r}_{n_k}}=\infty$ ナル系列ヲ考ヘル。

ソコデ $\underline{r}_{n_k}$ ヲ充分大キク且ツ $\dfrac{\bar{r}_{n_k}}{\underline{r}_{n_k}}$ モ充分大ナル如キモノヲトル。D_n ノ境界上デ 1，C_{r_n} 上デ 0 トナリ $C_{r_{n_k}}$ 内デ且ツ D_{n_k} 外ニアル領域デ調和ニナル函数ヲ $h_{r_{n_k}}(z)$ トスレバ

$$\log|f(\alpha)|\leqq \log M(\bar{r}_n)\left[1-h_{r_{n_k}}(\alpha)\right]$$

ノ最短距離点ヲ必要ナラバ z 平面ヲ廻轉シ $z=-\underline{r}_n$ トス．

(II) (イ)ニ於テ $\rho=\underline{r}_{n_k}$，$R=\bar{r}_{n_k}$ トオケバ（但シ $\alpha=re^{i\theta}$）



$$1-h_{r_{n_k}}(\alpha)\leqq\frac{2}{\pi}\beta$$

$$\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{|R|}{1+|R|}}$$

$$|R|=\frac{\bar{r}_n\sqrt{\underline{r}_{n_k}^2+2\underline{r}_{n_k}r\cos\theta+r^2}}{\sqrt{\bar{r}_{n_k}^4+2\bar{r}_n^2\underline{r}_{n_k}r\cos\theta+\underline{r}_{n_k}^2r^2}}$$

α ヲ $|f(\alpha)|>e$ ニシテ $|\alpha|<\bar{r}_{n_k}$ ナル如ク任意ニトリ固定シテ考ヘル．コレハ $\bar{r}_{n_k}$ ガ充分大ナレバ可能ナリ。

$\dfrac{\bar{r}_{n_k}}{\underline{r}_{n_k}}$ ガ充分大ニトレバ $|R|$ ハ充分小トナリ，

$$\frac{\beta}{2}\fallingdotseq\sqrt{\frac{|R|}{1+|R|}}=\sqrt{\frac{\underline{r}_{n_k}}{\bar{r}_{n_k}}}\left(1+\varepsilon(\bar{r}_{n_k})\right)$$

$\varepsilon(r_{n_k})$ ハ $\bar{r}_{n_k}\to\infty$ ノトキ $\longrightarrow 0$

$\log|f(\alpha)|>e$ ナル故以上ヲマトメテ

$$1 \leqq \frac{4}{\pi} \log M(\bar{r}_{n_k}) \sqrt{\frac{\underline{r}_{n_k}}{\bar{r}_{n_k}}} \left(1+\varepsilon(\bar{r}_{n_k})\right)$$

$$\therefore \quad \log \bar{r}_{n_k} - \log \underline{r}_{n_k} \leqq 2 \log_2 M(\bar{r}_{n_k}) + O(1) \cdots\cdots (4)$$

依ッテ定理(Ⅱ), (A) ノ條件ノモトニ $\underline{r}_n$ が充分大ナレバ, 常ニ

$$\log \bar{r}_n - \log \underline{r}_n \leqq 2 \log_2 M(\bar{r}_n) + O(1)$$

今 $\lambda < \frac{1}{2}$ ノトキヲ考ヘル.

ε ヲ任意ニ與ヘラレタ正數トス. $\bar{r}_n$ が充分大ナレバ

$$\frac{\log_2 M(\bar{r}_n)}{\log \bar{r}_n} < \lambda + \varepsilon$$

(4) ヨリ

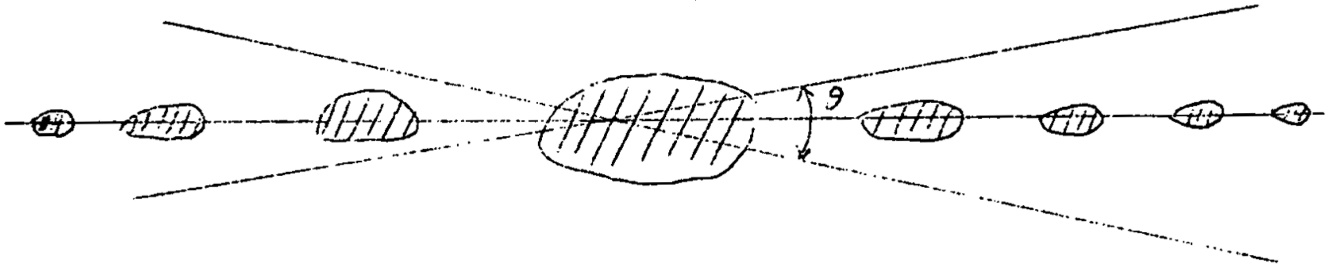
$$\left[1-2(\lambda+\varepsilon)\right] \frac{\log \bar{r}_n}{\log \underline{r}_n} \leqq 1 + \frac{O(1)}{\log \underline{r}_n}$$

故ニ
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log \bar{r}_n}{\log \underline{r}_n} \leqq \frac{1}{1-2\lambda}$$

系. $\lambda < \frac{1}{2}$ ノトキ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log \bar{r}_n}{\log \underline{r}_n} \leqq \frac{1}{1-2\lambda}$$

(注意) $z \sin z$ ハ W. property ヲ有スルケレドモ上ノ條件ニテハ判別不可能デアル $|z \sin z| < K$ ナル領域ヲ



作レバ図ノ如ク原点ニ対称ニ並ビ，原点ヨリ実軸ヲ二等分線トスル如何程小サイ角ヲ作ルモ充分大ナル距離ニアル領域ハスベテコノ角内ニアリ。C_rガコノ領域ト交ハレバ常ニ二回交ハル，コノ性質ニ着目スレバコノ場合ヲ含ム判別條件ガ得ラレマスガ内部的ナ性質ヲ假定スルノデ良イ結果ヲ得マセン，モット一般ナ簡単ナ條件ガ欲シイト思ヒマス。

以上ニテ間違ヒヲ犯シテ居ルカモ知レマセン，又御氣付ノ点ガアリマシタラ御教示願ヒマス。

—— 以 上 ——

（西大 2368）